Collège A.Lejeune
3ème
Cours Chapitre 1 : Les nombres entiers

Connaissances à acquérir à la fin du chapitre :
- Multiple et diviseur
- Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9
- Division euclidienne (quotient, reste)
- Définition d'un nombre premier, liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.
- Fractions irréductibles

I. Division euclidienne

A) Multiple et diviseur

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.

Définition : Si $a=b\times k$ (ou $a\div b=k$) où k est un entier naturel,
alors a **est un <u>multiple</u> de** b ou a **<u>divisible</u> par** b ou b **est un <u>diviseur</u>** de a ou b **<u>divise</u>** a.

Exemple : On sait que $63=7\times 9$. Il faut compléter les phrases suivantes avec le mot « multiple », »divisible » et « diviseur ».
1) 63 est un …………………………… de 9.
2) 7 …………………………. 63.
3) 63 est ………………………………. par 9.

B) Division euclidienne

Définition :
a et b désignent deux nombres entiers positifs, avec $b\neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r qui vérifient :

$$a=b\times q+r \quad \text{avec} \quad r<b$$

q s'appelle le quotient de la division euclidienne
r s'appelle le reste de la division euclidienne

Exemple :
a) Effectue la division euclidienne de 183 par 12.
b) $278=6\times 45+8$. Quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

II. Plus Grand commun diviseur de deux entiers

Définition : a et b désignent deux nombres entiers strictement

positifs. Le plus grand commun diviseur des nombres a et b s'appelle le PGCD des nombres a et b.
On le note : PGCD (a;b).

<u>Exemples :</u>
1) Donner la liste des diviseurs de 18 :

2) Donner la liste des diviseurs de 45 :

3) Les diviseurs communs à 18 et 45 sont :

4) Donc : PGCD(18;45)=….

<u>Propriétés :</u> a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec a<b.
PGCD(a;a)=a PGCD(a;1)=1
PGCD(a;b)=PGCD(b;a)
Si b est un diviseur de a, alors PGCD(a;b)=b.

<u>Exemples :</u>
- PGCD(103;103)=
- PGCD(47;1)=
- PGCD(31;27)=PGCD(…… ;……..)
- On a $85=17\times5$, donc PGCD(85;17)=……

Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs, avec a>b.
PGCD(a;b)=PGCD(b;a-b)

<u>Exemple :</u>
Calcul du PGCD(145;58) :
1) 145-58=87 d'où PGCD(145;58)=PGCD(58;87)
2)
3)
4)

Calcul du PGCD(189;693) :

<u>Propriété :</u> a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec a>b. PGCD(a;b)=PGCD(b;r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

<u>Exemple :</u> Calcul du PGCD(224;80)
$224=80\times2+64$ d'où PGCD(224;80)=PGCD(80;64)

III. Fraction irréductible

<u>Définition :</u> On dit que deux nombres entiers sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

<u>Exemples :</u> Démontrer que 26 et 49 sont des nombres premiers entre eux.

<u>Définition :</u> Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

<u>Exemples :</u>

1) Peut-on simplifier la fraction suivante $\frac{26}{49}$?

2) Peut-on simplifier la fraction suivante $\frac{18}{45}$?

<u>Propriété :</u> a et b désignent des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

La fraction $\frac{a}{b}$ peut être simplifiée par le PGCD (a;b) et la fraction ainsi obtenue est irréductible.

<u>Exemple :</u> Rendre irréductible la fraction $\frac{312}{546}$

<u>Exemple :</u> Rendre irréductible la fraction $\frac{105}{135}$